

Einsetzen der Konvektion in einer von unten gekühlten Wasserschicht bei Temperaturen unter 4° C

G.P. Merker, P. Waas, J. Straub und U. Grigull, München

Onset of Convection in a Horizontal Water Layer Cooled from below with Temperatures below 4° C

Abstract. The onset of convection was analytically and experimentally investigated for a horizontal water layer cooled from below. The water temperature varied from 0° C to 20° C. The neutral stability curves, predicted for different boundary conditions, are described by three parameters, the Rayleigh-Number Ra, the Nonlinearity N and the Biot-Number Bi. The Nonlinearity N considers the deviation of the real density-distribution from a linear distribution, the case of the well known Bénard-problem. The experimental results are in good agreement with the predicted values.

Zusammenfassung. Das Einsetzen der Konvektion in einer horizontalen von unten gekühlten Wasserschicht im Temperaturbereich 0° C bis 20° C wird analytisch und experimentell untersucht. Die, für verschiedene Randbedingungen an den beiden Begrenzungsflächen, berechneten Stabilitätsgrenzen werden durch drei Parameter, die Rayleigh-Zahl Ra, die Nichtlinearität N und die Biot-Zahl Bi vollständig beschrieben. Die Nichtlinearität N ist ein Maß für die Abweichung des tatsächlichen Dichteverlaufs von einem der Temperatur proportionalen Dichteverlauf, wie er beim klassischen "Bénard-Problem" vorliegt. Die experimentellen Ergebnisse stimmen mit den berechneten Werten sehr gut überein.

Bezeichnungen

a	Temperaturleitfähigkeit
b	Wellenzahl
E, F, G	Störfunktionen
g	Erdbeschleunigung
H	Höhe der Wasserschicht
$k = (0, 0, -1)$	Einheitsvektor
p	Druck
q	Wärmestromdichte
t	Zeit
T	Celcius-temperatur
$\vec{w} = (u, v, w)$	Geschwindigkeitsvektor
$\vec{x} = (x, y, z)$	Längenvektor
ν	kinematische Viscosität
σ	Dämpfungsfaktor
ρ	Dichte
$\zeta = z/H$	dimensionslose Höhe

$$\Delta = \nabla^2$$

$$\Delta_{xy}$$

$$\nabla$$

$$Bi$$

$$N$$

$$Ra$$

Indizes

$$\wedge$$

$$*$$

$$\rightarrow$$

$$0$$

$$K$$

$$G$$

$$U$$

$$1$$

$$2$$

Laplace-Operator

zweidimensionaler Laplace-Operator

Nabla-Operator

Biot-Zahl

Nichtlinearität

Rayleigh-Zahl

ungestörte Größe

Störgröße

Vektor

Bezugsgröße

Konvektionsbeginn

Gefrierbeginn

Umgebung

Wasserunterseite

Wasseroberseite

1. Einleitung

Wird eine horizontale Wasserschicht der Dicke H von unten gekühlt, so entsteht ein sich über die Wasserschicht veränderndes Temperatur- bzw. Dichteprofil. Diese Schichtung ist solange stabil, als die Dichte mit der Höhe abnimmt. Sinkt dagegen die Temperatur der Kühlplatte unter 4° C, so entsteht als Folge des Dichtemaximums bei etwa 4° C eine instabile Schichtung, die Dichte nimmt in diesem Bereich mit der Höhe zu. In einer stabilen Dichteschichtung erfolgt der Wärmetransport ausschließlich durch Leitung, wogegen in einer instabilen Schichtung Konvektion einsetzen kann, sobald die das Problem beschreibenden Parameter bzw. Kennzahlen, bestimmte sog. kritische Werte erreichen.

Für eine lineare Temperaturabhängigkeit der Dichte, wie sie für Wasser oberhalb von 10° C mit guter Näherung vorliegt, ist das Stabilitätsverhalten einer Fluid-Schicht unter dem Begriff "Bénard-Problem" hinlänglich bekannt. Die Stabilitätsgrenze bzw. das Einsetzen der Konvektion ist für verschiedene Randbedingungen auf der Ober- und Unterseite der Wasserschicht durch eine einzige Kennzahl, die sog. kritische Rayleigh-Zahl gekennzeichnet.

Als eine Art Erweiterung des "Bénard-Problems" wird in dieser Arbeit nun das Einsetzen der Konvektion bei einer von unten gekühlten Wasserschicht im Temperaturbereich $0 \leq T \leq 20^\circ \text{C}$, sowohl theoretisch als auch experimentell, untersucht. Es zeigt sich dabei, daß das Stabilitätsverhalten dieser Schicht durch zwei Parameter, Rayleigh-Zahl Ra und Nichtlinearität

tät N , vollständig beschrieben werden kann. Die Nichtlinearität ist dabei ein Maß für die Abweichung des tatsächlichen vom linearen Dichteverlauf. $N = 0$ liefert die Lösung des "Bénard-Problems".

Veronis [1] hat für den Fall isothermer Begrenzungsflächen - Temperatur der Unterseite 0°C , Temperatur der Oberseite gleich oder größer 4°C - eine geschlossene analytische Lösung angegeben. Diese Lösung, bei der die beiden Kennzahlen etwas anders als hier definiert sind, beschreibt jedoch nur einen Ast, Ra und N kleiner Null, der später zu diskutierenden Stabilitätsdiagramme. Experimentelle Untersuchungen von Legros et al. [2] an einer von unten beheizten Wasserschicht, mit Temperaturen der Oberseite zwischen 0°C und 20°C , stimmen mit den von Veronis [1] berechneten Werten gut überein.

Sparrow et al. [3] haben die Stabilitätsgrenzen einer horizontalen Fluid-Schicht mit inneren Wärmequellen aber linearer Temperaturabhängigkeit der Dichte analytisch untersucht. In der vorliegenden Arbeit wird weitgehend das von diesen Autoren verwendete Lösungsverfahren für die Stör-Differentialgleichung verwendet.

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Allgemeine Differentialgleichungen

Das Geschwindigkeits- und das Temperaturfeld in der von unten gekühlten Wasserschicht werden durch die Erhaltungssätze der Physik und die thermodynamische Zustandsgleichung beschrieben. Dabei Beginn der Konvektion die auftretenden Strömungsgeschwindigkeiten naturgemäß klein sind, kann Energiedissipation vernachlässigt werden. Im vorliegenden Temperaturbereich $0^\circ\text{C} \leq T \leq 20^\circ\text{C}$ werden die Stoffwerte, außer der veränderlichen Dichte im Auftriebsterm in der Bewegungsgleichung, als temperaturunabhängig angenommen (Boussinesq-Approximation), ferner wird das Wasser als inkompressibel angesehen.

Mit diesen, die beschreibenden Differentialgleichungen wesentlich vereinfachenden Annahmen erhält man aus dem Impulserhaltungssatz die Bewegungsgleichungen

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = \rho g \vec{k} - \nabla p + \nu \rho \Delta \vec{w} \quad (1)$$

mit dem Einheitsvektor für die Massenkraft $k = (0, 0, -1)$. Aus dem Energieerhaltungssatz folgt die Fouriersche Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{DT}{Dt} = a \Delta T. \quad (2)$$

Der Massenerhaltungssatz führt auf die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \vec{w} = 0. \quad (3)$$

Im vorliegenden Temperaturbereich $0 \leq T \leq 20^\circ\text{C}$ und für konstanten Druck $p \approx 1 \text{ atm}$ kann die Temperaturabhängigkeit der Dichte bei Wasser nach Merker et al. [4] durch die einfache Potenzgleichung zweiten Grades

$$\rho(T) = \rho_0 (1 + B_1 T + B_2 T^2) \quad (4)$$

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} \rho_0 &= 999,831 \text{ kg/m}^3, \\ B_1 &= 64,817 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}, \\ B_2 &= -7,798 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}^2 \end{aligned}$$

dargestellt werden.

2.2. Die Stör-Differentialgleichung

Im folgenden wird mit der Methode der kleinen Schwingungen das Stabilitätsverhalten eines ungestörten, stationären Ausgangszustandes untersucht. Als ungestörter Fall wird der stationäre Zustand betrachtet, bei dem Wärme nur durch eindimensionale Wärmeleitung zur Kühlplatte fließt, dafür gilt dann

$$\begin{aligned} \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} &= 0, \\ p &= \hat{p}(z), \\ T &= \hat{T}(z) \end{aligned} \quad (5)$$

Die Bewegungsgleichung (1) reduziert sich auf

$$0 = -\hat{\rho} g - \frac{d\hat{p}}{dz} \quad (1a)$$

und die Wärmeleitungsgleichung (2) auf

$$\frac{d^2 \hat{T}}{dz^2} = 0. \quad (2a)$$

Diesem ungestörten Fall werden kleine Störgeschwindigkeitskomponenten u^* , v^* und w^* , die kleine Tempe-

ratur- und Druckschwankungen T^* bzw. p^* hervorrufen, so überlagert, daß w , T und p die Grundgleichungen (1) bis (3) erfüllen. Für den gestörten Fall erhält man damit

$$\begin{aligned} u, v, w &= u^*, v^*, w^*(x, y, z, t), \\ T &= \hat{T}(z) + T^*(x, y, z, t), \\ p &= \hat{p}(z) + p^*(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Die Temperatur - bzw. Dichteschichtung ist stabil, wenn die einmal aufgebrauchten Störkomponenten mit der Zeit verschwinden, sie ist instabil, wenn diese Komponente über alle Grenzen anwachsen.

Die Störgrößen u^* , v^* , w^* , T^* und p^* sollen voraussetzungsgemäß so klein sein, daß ihre Produkte und Quadrate vernachlässigt werden können. Eliminiert man mit der Zustandsgleichung die Dichte im Auftriebsterm der Bewegungsgleichung, so erhält man die linearisierten Gleichungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \vec{w}^* = g \vec{k} T^* (B_1 + 2B_2 \hat{T}) - \frac{1}{\rho_0} \nabla p^*, \quad (1b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \Delta\right) T^* = -w^* \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}, \quad (2b)$$

$$\operatorname{div} \vec{w}^* = 0. \quad (3b)$$

Das sind 5 Gleichungen für die 5 Unbekannten u^* , v^* , w^* , T^* und p^* .

Aus den 3 Bewegungsgleichungen (1b) können unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung (3b) die Geschwindigkeitskomponenten u^* und v^* und der Druck p^* eliminiert werden. Es folgt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \Delta w^* = -g(B_1 + 2B_2 \hat{T}) \Delta_{xy} T^*. \quad (7)$$

Eliminiert man aus obiger Beziehung mit der Energiegleichung (2b) die Temperatur T^* , dann erhält man die sog. Stördifferentialgleichung für die Störgeschwindigkeitskomponente w^*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \Delta\right) \Delta w^* - \\ - \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} g(B_1 + 2B_2 \hat{T}) \Delta_{xy} w^* = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Diese Differentialgleichung liefert in Abhängigkeit vom Temperaturgradienten Lösungen für die Geschwindigkeitskomponente w^* . Ersetzt man in Gl. (8) w^* durch T^* so hat man die Stördifferentialgleichung für die Stör-

temperatur T^* . Unter Beachtung der in Kap. 2.4 zu besprechenden Randbedingungen sind die Lösungen der Stördifferentialgleichungen für w^* und T^* gesucht.

2.3. Die gewöhnliche Stör-Differentialgleichung

Da eine stabile Dichteschichtung primär durch Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Schichtung gestört wird, ist es sinnvoll, im Lösungsansatz für w^* bzw. T^* eine Trennung der Variablen einzuführen - die partielle Stördifferentialgleichung (8) läßt sich damit auf eine gewöhnliche Differentialgleichung transformieren - man erhält

$$w^* = F(z) \cdot G(x, y) \cdot \exp(\sigma t), \quad (9)$$

$$T^* = E(z) \cdot G(x, y) \cdot \exp(\sigma t). \quad (10)$$

Dabei gilt noch die Nebenbedingung

$$\Delta_{xy} G + \left(\frac{b}{H}\right)^2 G = 0, \quad (11)$$

die man durch Einsetzen der Randbedingung

$$w^* = 0 : z = 0, H \quad (12)$$

in Gl. (2b) erhält. Dabei kann die auftretende Konstante $(E''/E)_{z=0}$ durch b^2/H^2 ersetzt werden, Ref. [3].

Aus dem Lösungsansatz, Gl. (9) und (11) ergibt sich für $\sigma < 0$ ein stabiles und für $\sigma > 0$ ein instabiles Verhalten. $\sigma = 0$ stellt deshalb die sog. Stabilitätsgrenze dar.

Setzt man die Ansätze für w^* und T^* , Gl. (9) und (10), in die partielle Stördifferentialgleichung (8) ein, so kann mit der Nebenbedingung (11) die Funktion $G(x, y)$ eliminiert werden. An der Stabilitätsgrenze $\sigma = 0$ erhält man mit $\zeta = z/H$ für $F(\zeta)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} F^{VI} - 3b^2 F^{IV} + 3b^4 F^{II} + \\ \left[\frac{d\hat{T}}{d\zeta} g(B_1 + 2B_2 \hat{T}) \frac{H^3 b^2}{a \cdot \nu} - b^6 \right] F = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Mit der Annahme eines konstanten Temperaturgradienten im ungestörten Fall bzw. der Lösung der Gl. (2a)

$$\hat{T} = T_1 + (T_2 - T_1) \zeta \quad (2a)$$

folgt schließlich die gewöhnliche Differentialgleichung

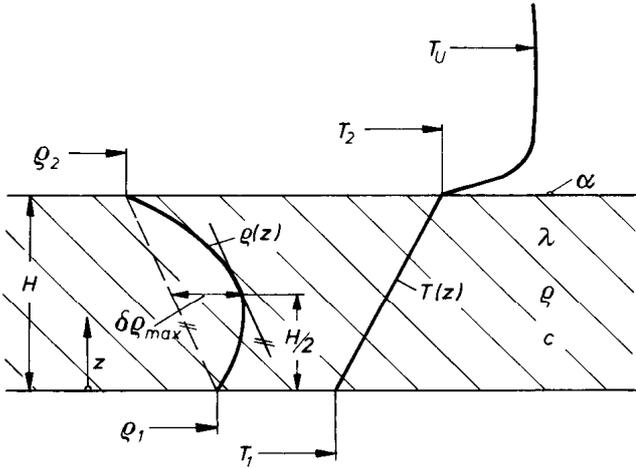


Bild 1. Temperatur- und Dichteverlauf in einer Wasserschicht im ungestörten, stationären Zustand für $T_1 \approx 0^\circ\text{C}$ und $T_2 \approx 15^\circ\text{C}$

$$F^{\text{VI}} - 3b^2 F^{\text{IV}} + 3b^4 F^{\text{II}} + [(Ra + (4 - 8\zeta)RaN)b^2 - b^6] F = 0 \quad (14)$$

für die unbekannte Funktion $F(\zeta)$.

Dabei wurden die beiden dimensionslosen Parameter Rayleigh-Zahl:

$$Ra = \frac{gH^3}{\alpha\nu} \frac{\rho(T_2) - \rho(T_1)}{\rho_0} \quad (15)$$

und Nichtlinearität:

$$N = \frac{\delta\rho_{\max}}{\rho(T_2) - \rho(T_1)} \quad (16)$$

eingeführt.

$\delta\rho_{\max}$ ist die maximale Abweichung des Dichteverlaufs infolge der Zustandsgleichung (4) von einem idealen, der Temperatur proportionalen Verlauf, s. Bild 1.

Es läßt sich zeigen, daß bei der mit Gl. (4) gegebenen quadratischen Temperaturabhängigkeit der Dichte die maximale Abweichung immer an der Stelle $H/2$ auftritt und den Wert

$$\delta\rho_{\max} = -\frac{B_2}{4} (T_2 - T_1)^2 \rho_0 \quad (17)$$

hat. Der Koeffizient B_2 der quadratischen Zustandsgleichung ist für Wasser negativ, Merker et.al. [4].

2.4. Randbedingungen

Bei der vorliegenden Aufgabe treten zwei Arten von Randbedingungen, hydrodynamische und thermische, auf.

a) Hydrodynamische Randbedingungen

a1) Bei einer festen Begrenzungsfläche werden an dieser alle Geschwindigkeitskomponenten zu Null. Da diese Haftbedingungen für alle x und y erfüllt sein muß, folgt damit aus der Kontinuitätsgleichung (3)

$$\frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (18.1)$$

Mit Gl. (9) erhält man somit für eine feste Grenzfläche

$$F = F^{\text{I}} = 0. \quad (18.2)$$

a2) An einer freien Begrenzungsfläche muß ebenfalls die vertikale Geschwindigkeitskomponente w^* verschwinden. Eine freie Oberfläche kann definitionsgemäß keine Tangentialspannungen übertragen, es gilt

$$\frac{\partial u^*}{\partial z} = \frac{\partial v^*}{\partial z} = 0. \quad (19.1)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (3) folgt damit

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} = 0 \quad (19.2)$$

und daraus mit Gl. (9) für eine freie Oberfläche

$$F = F^{\text{II}} = 0. \quad (19.3)$$

b) Thermische Randbedingungen

Üblicherweise versteht man unter Randbedingung I.

Art eine Aussage über die Temperatur der Begrenzungsfläche, die Randbedingung II. Art ist eine Aussage über den Wärmestrom durch die Begrenzungsfläche und die Randbedingung III. Art ist eine Kopplung zwischen dem Wärmetransport infolge Leitung in einem Medium und dem konvektiven Wärmetransport von bzw. zur Begrenzungsfläche.

b1) Ist die Temperatur der Begrenzungsfläche konstant, so gilt $T^* = 0$. Damit folgt aus Gl. (7)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right) \Delta w^* = 0. \quad (20.1)$$

Mit dem Lösungsansatz (9) und der Nebenbedingung (11) folgt daraus für die Stabilitätsgrenze $\sigma = 0$

$$F^{IV} - 2b^2 F^{II} + b^4 F = 0. \quad (20.2)$$

b2) Ist der Wärmestrom an der Begrenzungsfläche konstant, so erhält man mit $\partial T^*/\partial z = 0$ analog zu b1) die Beziehung

$$F^V - 2b^2 F^{III} + b^4 F^I = 0. \quad (21)$$

b3) Die Randbedingung III. Art liefert für die Begrenzungsfläche die Bedingung

$$-\frac{\partial T^*}{\partial \zeta} = \frac{\alpha H}{\lambda} T^*. \quad (22.1)$$

Analog zu oben erhält man damit die Bedingung

$$F^V - 2b^2 F^{III} + b^4 F^I = -Bi(F^{IV} - 2b^2 F^{II} + b^4 F), \quad (22.2)$$

wobei $Bi = \alpha H/\lambda$ die Biot-Zahl darstellt.

2.5. Lösungsansatz für $F(z)$

Die gewöhnliche homogene Differentialgleichung (14) kann mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes gelöst werden. Nach Sparrow et.al. [3] wird der spezielle Ansatz

$$F(\zeta) = \sum_{i=0}^5 c_i f_i^{(i)}(\zeta), \quad (23)$$

$$f_n^{(i)}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(i)} \cdot \zeta^n$$

verwendet. Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung (14) ein und berücksichtigt, daß die Koeffizienten aller auftretenden Potenzreihenglieder zu Null werden müssen, so erhält man eine Rekursionsformel für die Koeffizienten d_n für $n \geq 6$:

$$n! d_n^{(i)} = 3b^2(n-2)! d_{n-2}^{(i)} - 3b^4(n-4)! d_{n-4}^{(i)} - [(Ra + 4RaN)b^2 - b^6](n-6)! d_{n-6}^{(i)} + 8RaNb^2(n-6)! d_{n-7}^{(i)}. \quad (24.1)$$

Die Koeffizienten $d_0^{(i)}$ bis $d_5^{(i)}$ berechnen sich dabei mit

$$d_n^{(i)} = \delta_{ni} = \begin{cases} 1 & : n = i \\ 0 & : n \neq i \end{cases}; 0 \leq n \leq 5. \quad (24.2)$$

Die Koeffizienten C_0 bis C_5 werden über die Randbedingungen der speziellen Aufgabe bestimmt.

2.6 Lösungsweg

Für den Fall, daß an den Begrenzungsflächen gilt:

$\zeta = 0$: feste Begrenzungsfläche und RB II. Art

$\zeta = 1$: freie Begrenzungsfläche und RB III. Art

soll die weitere Behandlung kurz skizziert werden.

Mit den Gln.(18.2) und (21) lauten die Randbedingungen für die untere Begrenzungsfläche, $\zeta = 0$:

$$F = F^I = 0, \quad (18.2)$$

$$F^V - 2b^2 F^{III} = 0 \quad (21.1)$$

und mit den Gln.(19.3) und (22.2) für die obere Begrenzungsfläche, $\zeta = 1$:

$$F = F^{II} = 0, \quad (19.3)$$

$$F^V - 2b^2 F^{III} + b^4 F^I + BiF^{IV} = 0. \quad (22.3)$$

Mit dem Lösungsansatz (23) folgt aus den obigen Beziehungen ein lineares algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung der 6 unbekannt Koeffizienten C_0 bis C_5 , wobei sich die Koeffizienten C_0 und C_1 mit Gl.(18.2) zu Null ergeben.

Zur Bestimmung der Koeffizienten C_2 bis C_5 erhält man folgendes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & -12a^2 & 0 & 120 \\ f_{(1)}^{(2)} & f_{(1)}^{(3)} & f_{(1)}^{(4)} & f_{(1)}^{(5)} \\ f_{(1)}^{(2)II} & f_{(1)}^{(3)II} & f_{(1)}^{(4)II} & f_{(1)}^{(5)II} \\ A_{(1)}^{(2)} & A_{(1)}^{(3)} & A_{(1)}^{(4)} & A_{(1)}^{(5)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = 0 \quad (25)$$

mit

$$A_{(1)}^{(i)} = f_{(1)}^{(i)V} - 2b^2 f_{(1)}^{(i)III} + b^4 f_{(1)}^{(i)I} + Bi f_{(1)}^{(i)IV}. \quad (26)$$

Lösungen des Gleichungssystems (25) existieren nur, wenn der Wert der Koeffizientendeterminante Null wird. Diese Determinante ist eine Funktion von 4 Variablen der Rayleigh-Zahl Ra , der Nichtlinearität N , der Biot-Zahl Bi und der Wellenzahl b

$$Det = f(Ra, N, Bi, b) \quad (27)$$

Gibt man die Biot-Zahl und die Nichtlinearität N als konstant vor, so läßt sich zu jedem Wert der Wellenzahl b eine Rayleigh-Zahl Ra ermitteln, für die die Koeffizientendeterminante Null wird. Dabei zeigt sich, daß in Abhängigkeit der Wellenzahl die zugehörige Rayleigh-Zahl ein Minimum durchläuft.

Diese minimale Rayleigh-Zahl gibt die Stabilitätsgrenze bei vorgegebener Biot-Zahl und Nichtlinearität an und wird allgemein als kritische Rayleigh-Zahl bezeichnet.

2.7. Ergebnisse

Bei allen untersuchten Fällen wurde die untere Begrenzungsfläche (Boden) als fest angenommen. Für die Oberseite der Wasserschicht, feste oder freie Oberfläche wurde die thermische Randbedingung III. Art gewählt.

Tabelle 1. Fallunterscheidung aufgrund der Randbedingungen

Fall	Begrenzungsfläche		
	oben	unten	
I	frei		$q = \text{const}$
II	frei		$T_1 = \text{const}$
III	fest	$0 \leq Bi \leq \infty$	$q = \text{const}$
IV	fest		$T_1 = \text{const}$

Tabelle 2. Kritische Rayleigh-Zahl, Nichtlinearität und Wellenzahl für Fall I, oben: freie Begrenzung und $0 \leq Bi \leq \infty$, unten: feste Begrenzung und $q = \text{const}$

$Bi = 0$		N	$Bi = \infty$	
Ra	b		Ra	b
320	0	0	816,7	2,22
334	0	0,1	818,1	2,19
351	0	0,2	817,9	2,18
411	0	0,5	808	2,17
576	0	1,0	768	2,17
736	2,39	2	653	2,27
449	2,90	5	398,5	2,52
256	2,99	10	231,5	2,66
28,8	3,08	100	26,5	2,82

- 29,3	3,10	-100	- 27,3	2,90
-328,3	3,30	- 10	-310	2,90
- 2,75 · 10 ³	3,50	- 2	- 2,74 · 10 ³	3,50
- 11,63 · 10 ³	4,50	- 1	- 11,63 · 10 ³	4,00
-	-	- 0,5	-181,8 · 10 ³	5,30

Tabelle 3. Kritische Rayleigh-Zahl, Nichtlinearität und Wellenzahl für Fall II, oben: freie Begrenzung und $0 \leq Bi \leq \infty$, unten: feste Begrenzung und $T = \text{const}$

$Bi = 0$		N	$Bi = \infty$	
Ra	b		Ra	b
669	2,09	0	1100,66	2,68
725	2,10	0,1	1137	2,69
1040	2,30	0,5	1271	2,76
1440	3,01	1	1361	2,93
1333	3,70	2	1237	3,38
428	4,07	10	417	3,91
48	4,22	100	46,8	4,10

- 49	4,00	-100	- 48	4,11
- 545	4,36	- 10	- 539,8	4,20
- 19,9 · 10 ³	5,66	- 1	- 19,8 · 10 ³	5,40
- 385 · 10 ³	5,80	- 0,5	- 348 · 10 ³	5,70
- 8,25 · 10 ⁶	5,80	- 0,1	8,25 · 10 ⁶	5,70

Tabelle 4. Kritische Rayleigh-Zahl, Nichtlinearität und Wellenzahl für Fall III, oben: feste Begrenzung und $0 \leq Bi \leq \infty$, unten: feste Begrenzung und $q = \text{const}$

Bi = 0		N	Bi = ∞	
Ra	b		Ra	b
720	0	0	1295,8	2,55
720	0	0,1	1257,5	2,53
720	0	1	943,8	2,47
238	2,7	10	224,9	2,62
27	2,8	100	25,4	2,68

- 26,5	2,8	-100	- 26,2	2,70
- 298	2,85	-10	- 297,3	2,80
-11697	4,10	-1	-11697	4,00

Die Randbedingung III. Art, Gl.(24.2), geht für $Bi \rightarrow \infty$ in die Randbedingung I. Art über. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der andere Grenzfall $Bi = 0$ hier nicht als adiabate Oberseite interpretiert werden kann, da der im ungestörten Fall vorhandene konstante Temperaturgradient einen endlichen Wärmestrom an der Oberseite verlangt. Damit gilt an der Oberseite der Wasserschicht:

- Bi = 0 : $q = \text{const.}$, Randbedingung II. Art
- $0 < Bi < \infty$: Randbedingung III. Art
- Bi = ∞ : $T = \text{const.}$, Randbedingung I. Art

Mit den restlichen Randbedingungen lassen sich 4 Fälle unterscheiden, siehe Tabelle 1.

Die Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung sind in den Tabellen 2 bis 5 bzw. in den Bildern 2 bis 5 dargestellt, in denen der Betrag der Rayleigh-Zahl Ra in Abhängigkeit der Nichtlinearität N aufgetragen ist.

Tabelle 5. Kritische Rayleigh-Zahl, Nichtlinearität und Wellenzahl für Fall IV, oben: feste Begrenzung und $Bi = 0$ unten: feste Begrenzung und $T = \text{const}$ Grenzwert für $Bi = \infty, N = 0$: Ra = 1706

Bi = 0		
Ra	b	N
1295,8	2,55	0
1369,2	2,60	0,2
1497,1	3,10	1
1286,2	3,50	2
421	4,00	10
47,2	4,10	100

- 48,4	4,10	-100
- 542,9	4,20	-10
-19891	5,30	-1

Kleine Krümmungen des Dichteprofiles $\rho(z)$ haben im Bereich $N > 0$ bzw. $\rho_2 > \rho_1$ fast keinen Einfluß auf das Stabilitätsverhalten; bei freier Oberfläche und kleinen Biot-Zahlen wirken sie sogar stabilisierend, Bild 3 und 4. Ab etwa $Ra \cdot N > 10^3$ bzw. $N > 1$ wird die kritische Rayleigh-Zahl sehr schnell kleiner, bis sie in allen Fällen im Bereich $2 \cdot 10^3 < Ra \cdot N < 5 \cdot 10^3$ den Wert Null erreicht; d.h. ab einer bestimmten Krümmung wird das Dichteprofil mit $\rho_2 = \rho_1$ instabil.

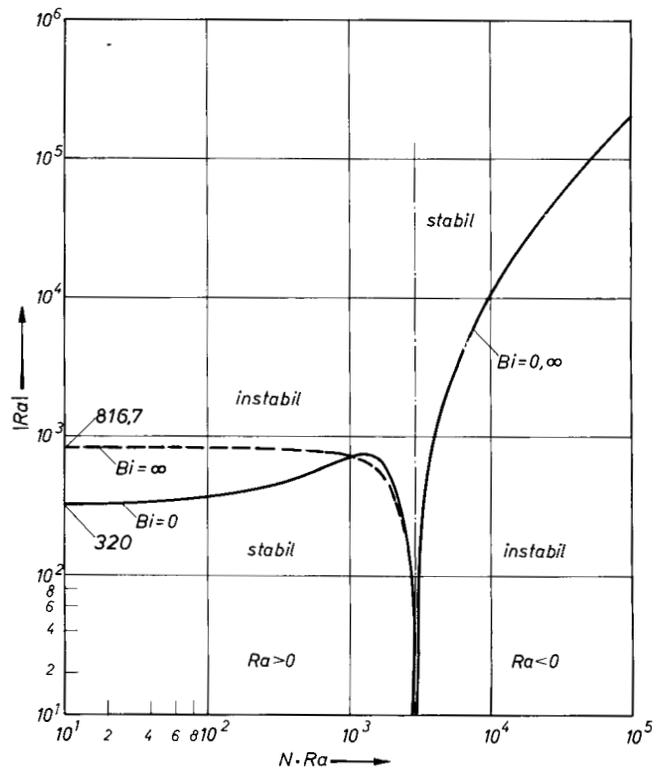


Bild 2. Stabilitätsdiagramm für Fall I, unten: feste Begrenzung und $q = \text{const}$, oben: freie Begrenzung und $0 \leq Bi \leq \infty$

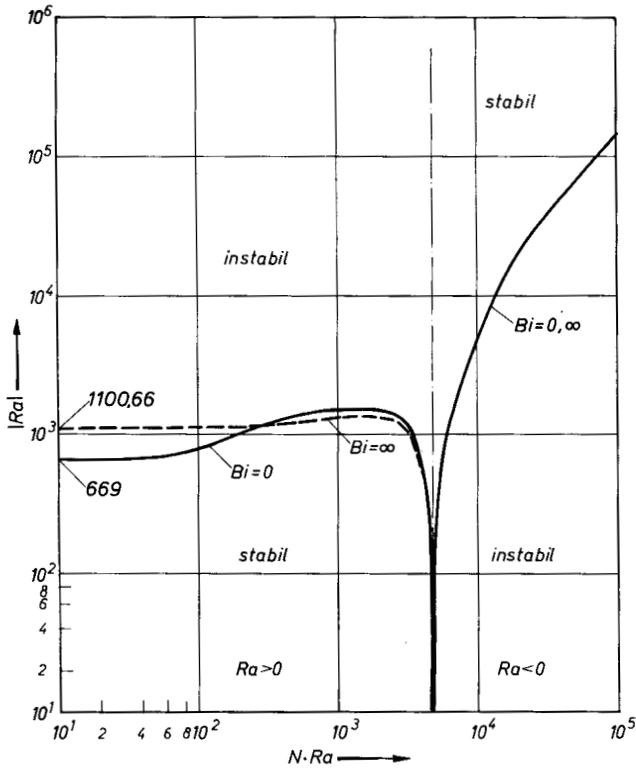


Bild 3. Stabilitätsdiagramm für Fall II, unten: feste Begrenzung und $T = \text{const.}$ oben: freie Begrenzung und $0 \leq Bi \leq \infty$

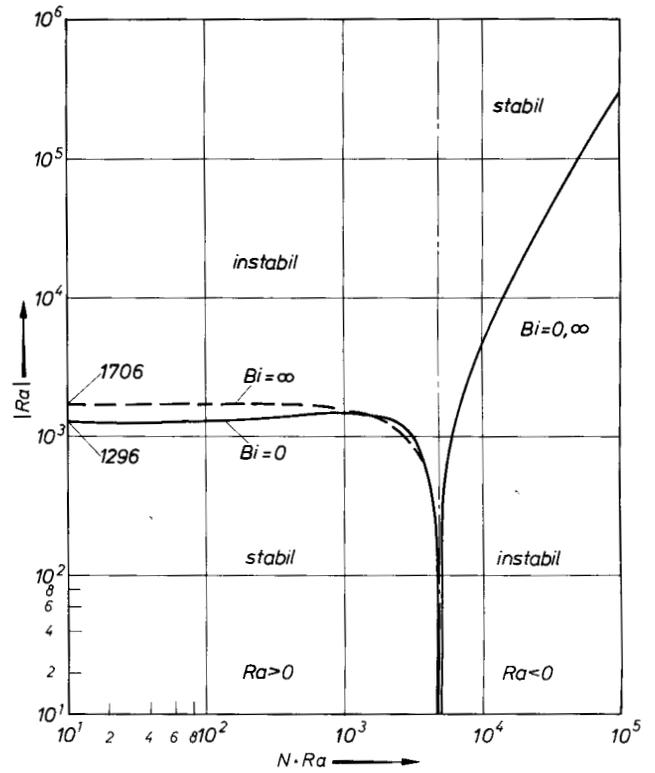


Bild 5. Stabilitätsdiagramm für Fall IV, unten: feste Begrenzung und $T = \text{const.}$ oben: feste Begrenzung und $0 \leq Bi \leq \infty$

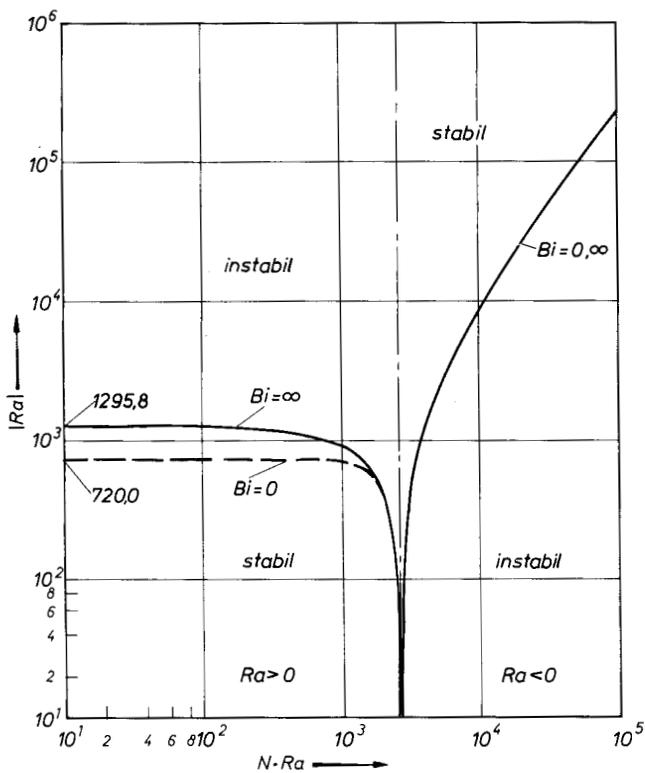


Bild 4. Stabilitätsdiagramm für Fall III, unten: feste Begrenzung und $q = \text{const.}$ oben: feste Begrenzung und $0 \leq Bi \leq \infty$

Anhand der Definition der beiden Kennzahlen erkennt man, daß die Stabilitätskurve zwei Äste haben muß; für $\rho_2 > \rho_1$ sind Ra und N positiv und für $\rho_2 < \rho_1$ negativ. Die Auftragung Ra über $Ra \cdot N$ hat den Vorteil, daß der Punkt mit $\rho_2 = \rho_1$ bzw. $Ra = 0$ im Endlichen liegt.

Für $N = 0$ liegt die Lösung des "Bénard-Problems" vor. Die dafür berechneten Werte sind als Asymptoten in die Stabilitätsdiagramme eingezeichnet und stimmen mit den bekannten Werten aus der Literatur überein.

Für eine konvergente numerische Lösung mußten im allgemeinen 30 bis 50 Reihenglieder berücksichtigt werden. Die numerischen Rechnungen wurden auf einem Digital-Rechner mit sechs Dezimalstellen durchgeführt, die Rayleigh-Zahlen können dadurch bis zu $\pm 0,1$ und die Wellenzahlen bis zu $\pm 0,03$ von den exakten Werten abweichen.

3. Experimentelle Untersuchungen

Im folgenden werden für den Fall: konstanter Wärmestrom am Boden, Randbedingung III. Art an der freien Oberfläche, eigene Versuche beschrieben.

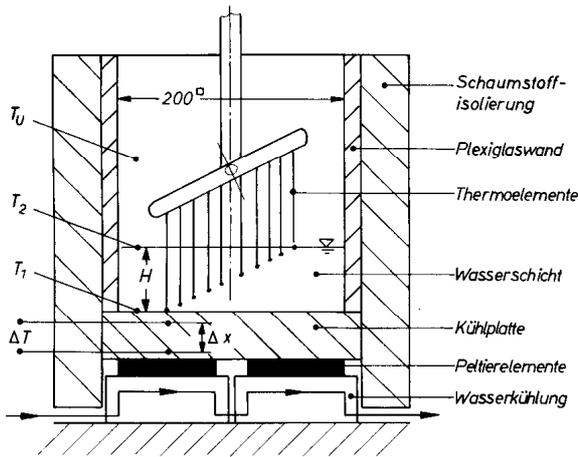
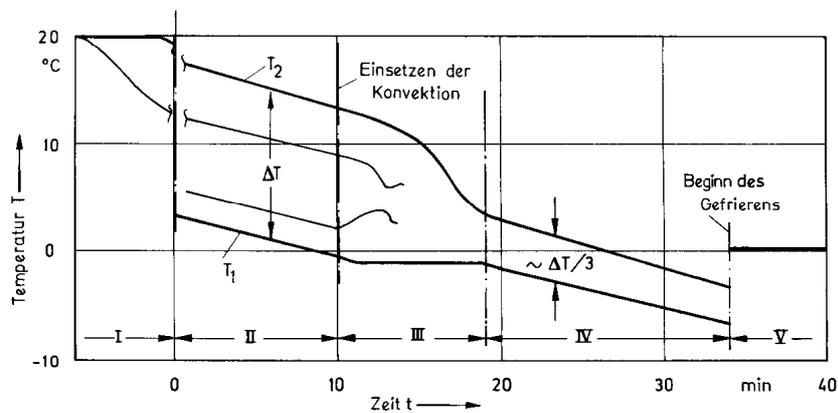


Bild 6. Schematische Darstellung des Versuchsgefäßes

Die Temperaturverteilung $T(z)$ in der Wasserschicht wurde mit 10 Ni - CrNi - Thermoelementen gemessen. Gegen die Umgebung waren die Seitenwände des Versuchsgefäßes (Plexiglas) mit Schaumstoff isoliert.

3.2. Versuchsergebnisse

Bild 7 zeigt den gemessenen Temperaturverlauf auf der Ober- und Unterseite der Wasserschicht als Funktion der Zeit für einen typischen Versuchsablauf. Dabei lassen sich 4 Bereiche definieren. Bereich I stellt den instationären Anlaufvorgang dar. In der Phase der quasistationären Abkühlung, Bereich II, bleibt die Temperaturdifferenz $T(z = H) - T(z = 0)$ nahezu konstant.

Bild 7. Zeitlicher Verlauf der Temperaturen $T_1(t)$ und $T_2(t)$ während eines Versuches

3.1. Versuchsaufbau

Bild 6 zeigt schematisch das Versuchsgefäß. Die Kühlplatte bestand aus einem Aluminiumblech mit den Abmessungen $200 \times 200 \times 16$ mm, deren Unterseite mit Peltier-Elementen gekühlt war. Mit diesen Peltier-Elementen ließ sich die Randbedingung II. Art, konstanter Wärmestrom auf der Unterseite, sehr gut verwirklichen. Dazu waren in der Aluminiumplatte zwei Thermolemente im Abstand $\Delta x = 9$ mm angebracht. Mit der gemessenen Thermospannungs- bzw. Temperaturdifferenz ΔT konnte damit, abgesehen von der instationären Anlaufphase, der Wärmestrom q , der im Bereich $500 < q < 5000$ W/m² variiert wurde, berechnet werden. Die Temperaturdifferenz ΔT ließ sich während eines Versuches konstant halten, wenn die warmen Seiten der Peltier-Elemente mit temperiertem Kühlwasser auf konstanter Temperatur von etwa 20°C gehalten wurden.

Wärme wird in der Wasserschicht nur durch Leitung transportiert. Bei t_K setzt Konvektion ein. Dies läßt sich anhand der aufgezeichneten Thermospannungen sehr gut festhalten, da sie, von unten beginnend, allmählich von ihrem geradlinigen Verlauf abweichen. Unterhalb der 4°C-Isothermen wird Wärme durch Konvektion, oberhalb durch Leitung transportiert. In der Übergangsphase, Bereich III, wandert die 4°C-Isotherme nach oben und damit vergrößert sich auch der Konvektionsbereich zwischen der Wasserunterseite und der 4°C-Isothermen. Dies wird durch optische Beobachtungen mit dem einfachen Schattenverfahren gut bestätigt, Bild 8. Im Bereich IV findet eine weitere Abkühlung der Wasserschicht statt. Infolge der, über die gesamte Wasserhöhe ausgedehnten Konvektion ist die Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite wesentlich kleiner geworden. Bei t_G gefriert die Wasserschicht. Die Temperatur in den unteren Wasser-

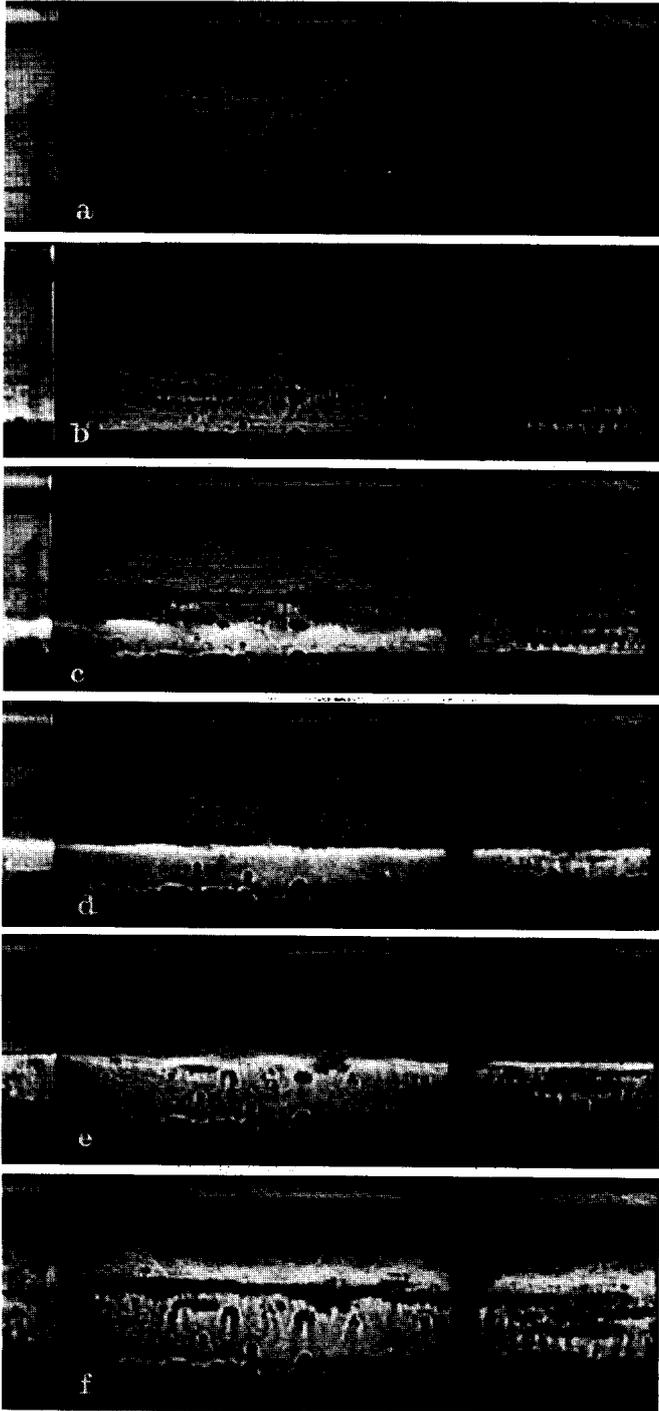


Bild 8. Ausbreitung des Konvektionsbereiches: keine Konvektion (a), Einsetzen der Konvektion (b), Ausbreitung des Konvektionsbereiches (c-e), Konvektion über die gesamte Wasserhöhe (f)

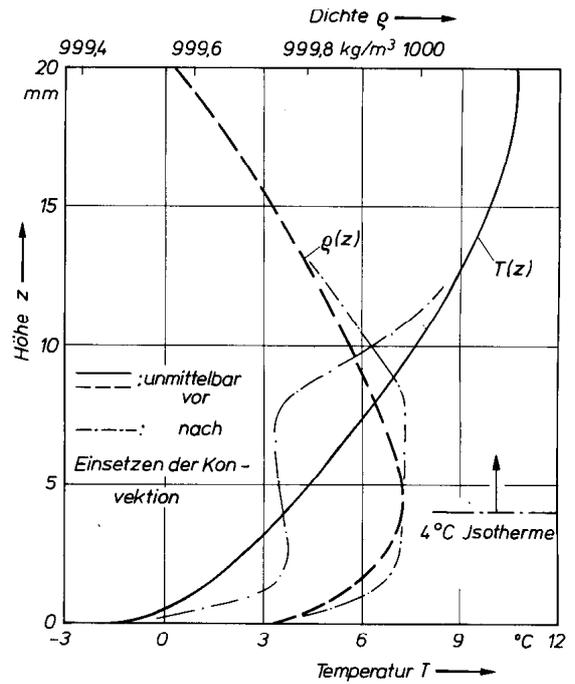


Bild 9. Temperatur- und Dichteprofil kurz vor und unmittelbar nach dem Einsetzen der Konvektion

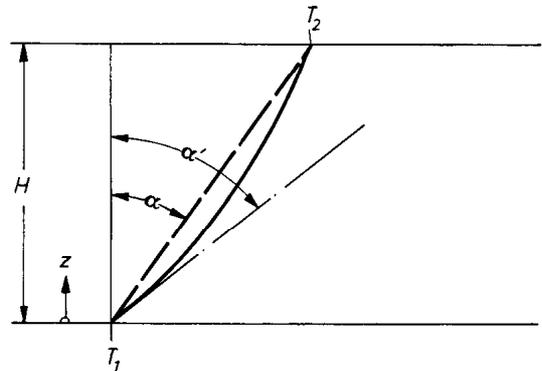


Bild 10. Skizze zur Korrektur der Rayleigh-Zahl beim klassischen "Bénard-Problem"

schichten kann dabei bis auf -5°C gesunken sein. Die ersten Eiskristalle bilden sich an der Kühlplatte und wachsen sehr schnell bis sie die Wasseroberfläche erreicht haben. Die Temperatur steigt dabei sprunghaft auf 0°C an.

In Bild 9 sind je ein gemessenes Temperatur- und Dichteprofil kurz vor und unmittelbar nach Einsetzen der Konvektion dargestellt. Damit können die Rayleigh-Zahl und die Nichtlinearität berechnet werden. Dabei ist allerdings folgendes zu beachten: Während die

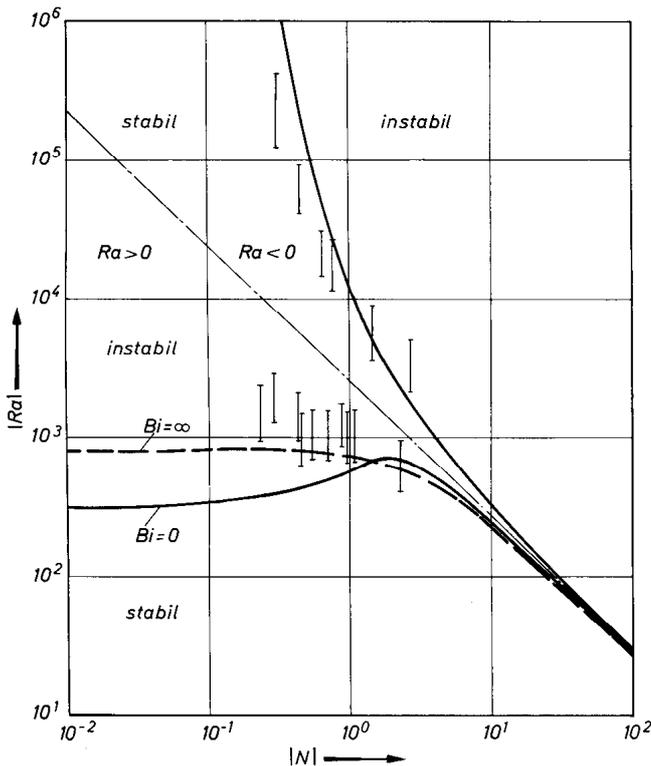


Bild 11. Vergleich der experimentell ermittelten mit den berechneten Werten

Theorie einen linearen Temperaturverlauf $T(z)$ voraussetzt, ist das tatsächliche Temperaturprofil in der quasistationären Abkühlphase, Bereich II in Bild 7, gekrümmt.

Sieht man einmal von der Nichtlinearität ab, betrachtet also den Fall des klassischen "Bénard-Problems", so kann die Krümmung des Temperaturprofils durch eine einfache Korrektur näherungsweise berücksichtigt werden, siehe Bild 10. Für die Rayleigh-Zahl erhält man in diesem Fall

$$Ra = \frac{gH^3}{\alpha\nu} \beta(T_2 - T_1) = \text{const.} \quad (28)$$

Unter der Annahme, daß die Neigung des Temperaturprofils an der Unterseite einen wesentlichen Einfluß auf die Stabilität der Schichtung hat, läßt sich die Beziehung (28) auch darstellen mit

$$H^4 \frac{T_2 - T_1}{H} \equiv H^4 \cdot \tan \alpha = H_{\text{Red}}^4 \cdot \tan \alpha^I. \quad (29)$$

Die Tangente an das Temperaturprofil bei $z = 0$ kann

mit dem Wärmestrom q dargestellt werden zu

$$q = \lambda_{\text{Wasser}} \cdot \tan \alpha^I. \quad (30)$$

Damit folgt für die reduzierte Wasserhöhe H_{Red} die Beziehung

$$\frac{H_{\text{Red}}}{H} = \left(\frac{\lambda(T_2 - T_1)}{qH} \right)^{1/4}. \quad (31)$$

Die reduzierte Höhe H_{Red} wird wegen $\alpha^I > \alpha$ stets kleiner als die tatsächliche Wasserhöhe H sein.

Mit dem gemessenen Dichteprofil $\rho(z)$ und Bild 9 und unter Beachtung der Beziehung (31) können die Rayleigh-Zahl Ra und die Nichtlinearität N berechnet werden. Die Ergebnisse sind für verschiedene Versuche in Bild 11 dargestellt, dabei ist der Betrag der Rayleigh-Zahl in Abhängigkeit der Nichtlinearität aufgetragen. In das Diagramm sind zum Vergleich auch die berechneten Stabilitätsgrenzen bei einer freien Wasseroberfläche eingezeichnet.

Die beiden Äste der berechneten Stabilitätsgrenzen, Ra und N größer bzw. kleiner Null, werden durch die experimentellen Ergebnisse gut bestätigt. Die Unsicherheit bei der Rayleigh-Zahl beträgt etwa $\pm 30\%$, der relative Fehler der Nichtlinearität nimmt wegen der abnehmenden Dichtedifferenz $\rho_2 - \rho_1$ mit steigendem Wert dieser Kennzahl zu. Erwartungsgemäß liegen die aus den Experimenten ermittelten Stabilitätsgrenzen bei größeren Rayleigh-Zahlen als die theoretisch ermittelten. Nur für den Fall, daß im Experiment die unwillkürlich vorhandenen Störungen das ganze Frequenzspektrum überdecken, wird man die berechneten "minimalen" Rayleigh-Zahlen messen.

4. Schlußbetrachtungen

Die dargestellten Ergebnisse sollen an Hand eines einfachen Beispiels einer Wasserschicht mit der Dicke H über einer Eisfläche veranschaulicht werden.

Die Unterseite (fest) und die Oberseite (frei) seien isotherme Flächen. Die Unterseite habe stets 0°C , die Temperatur der Oberseite sei im Bereich $0 < T_2 < 20^\circ\text{C}$ variierbar.

In Bild 12 sind drei charakteristische Temperatur- und Dichteprofile dargestellt. Die Profile b und c wären bei linearer Temperaturabhängigkeit der Dichte stabil. Aus Bild 13 ist jedoch zu entnehmen, daß im vorliegenden Fall in Abhängigkeit der Wasserhöhe alle

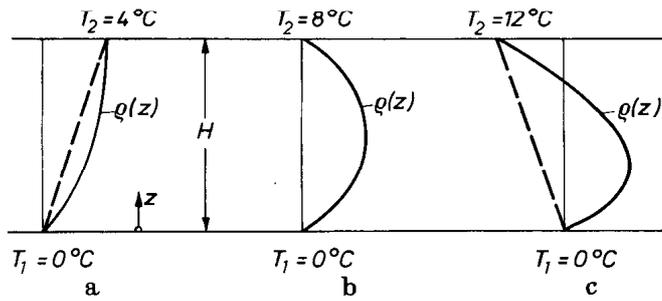


Bild 12. Temperatur- und Dichteprofile in einer Wasserschicht mit den isothermen Berandungen: unten $T_1 = 0^\circ\text{C}$, oben $T_2 = 4^\circ\text{C}$ (a), 8°C (b) und 12°C (c)

drei Profile instabil werden können. Die gestrichelte Kurve in Bild 13 stellt die Lösung für ein "Bénard-Fluid" dar; dafür gilt dann für die vorliegenden Randbedingungen

$$Ra_{\text{Krit}} = \frac{gH^3}{\alpha\nu} \frac{\rho(T_2) - \rho(T_1)}{\rho(T_1)} = 1100. \quad (32)$$

Für Temperaturen T_2 kleiner als 7°C stellt die Lösung für das "Bénard-Fluid" eine brauchbare Näherung dar, d.h. es bestätigt sich die bereits an Hand der berechneten Stabilitätsdiagramme getroffene Feststellung, daß im Bereich $Ra, N > 0$ die Krümmung des Dichteprofiles erst ab $N > 1$ Einfluß auf das Stabilitätsverhalten gewinnt.

Die beobachtete Tatsache, daß bei Wasserhöhen kleiner als 5 mm keine Konvektion festgestellt werden konnte, stimmt mit der berechneten Stabilitätskurve in Bild 13 gut überein.

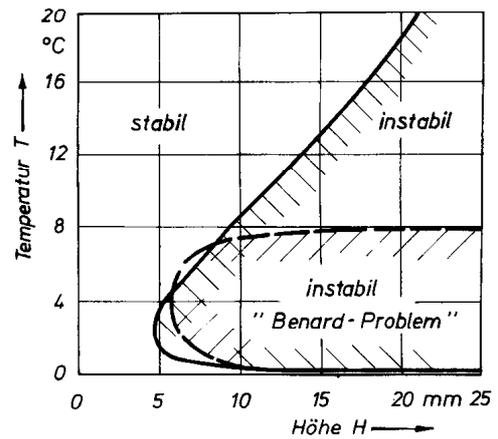


Bild 13. Stabilitätsdiagramm für eine Wasserschicht mit $T_1 = 0^\circ\text{C}$ und isothermer fester Berandung

Literatur

1. Veronis, G.: Penetrative convection. *Astrophys. J.* **137**(1963) 641/663
2. Legros, J.C.; Londree, D.; Thomaes, G.: Bénard problem in water near 4°C . *Physica* **12**(1974) 410/414
3. Sparrow, E.M.; Goldstein, R.J.; Konsson, V.K.: Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile. *J. Fluid Mech.* **18**(1963) 513/528
4. Merker, G.P.; Straub, J.; Grigull, U.; Damian, A.: The density of water subcooled to -6°C at the pressure of 1 atm. *Proc. of the 8th International Conf. on the Properties of Steam, France, Hyères-Giens, 23.-27.9.1974* (in Vorbereitung)

Dr.-Ing. Günter P. Merker
 Dipl.-Ing. Peter Waas
 Dr.-Ing. Johannes Straub
 Prof. Dr.-Ing. Ulrich Grigull

Lehrstuhl A für Thermodynamik
 Technische Universität München
 Arcisstrasse 21, Postfach
 D-8000 München 2
 Bundesrepublik Deutschland

Eingegangen am 12 September 1975